KÉNYSZERES DINAMIKAI RENDSZEREK I

Gergely Árpád László

T A R T A L O M

I. Bevezetés

A klasszikus mechanika ritkán tapasztalt matematikai eleganciájú és hatékonyságú tudományterületté fejlődött Lagrange, Hamilton, D'Alembert, Jacobi, Noether és mások munkássága nyomán. A századunkban vizsgált dinamikai rendszerek jelentős része azonban nem helyezhető el a klasszikus keretek között, így szükségessé vált a kényszeres rendszerek dinamikájának kidolgozása. A következőkben röviden megkisérlem felvázolni a probléma jellegét.

Tekintsük a Lagrange-függvényekkel jellemzett dinamikai rendszereket. Képezzük a Lagrange-függvények általánosított sebességek szerinti második időderiváltjaiból álló mátrixot. Ha ez a mátrix szinguláris, a dinamikai rendszert szingulárisnak fogjuk nevezni. A klasszikus pontrendszerek mechanikájában csak nagyon mesterkélt példákat lehet találni szinguláris rendszerekre, így a szokványos tananyagban nem is szerepel ez az eset. Ha viszont áttérünk a pontrendszerek relativisztikus, illetve a mezőkkel való leírásra, kiderül, hogy ilyen típusú

* a szabad relativisztikus részecske Lagrange-sűrűsége

* az elektromágneses Lagrange-sűrűség

* az általános relativitáselméletben a gravitáció Lagrange-sűrűsége

* és az összes fermiont leíró Lagrange-sűrűségek

Ezekben, a fizikai szempontból rendkívül fontos esetekben a Lagrange függvény szinguláris jellege miatt az Euler-Lagrange egyenletek egyrésze nem a mechanikában megszokott másodrendű differenciálegyenlet, aminek következményeként a kezdeti értékek megadása esetén is csak tetszőleges függvények erejéig meghatározott a megoldás. Ugyanakkor a Hamilton-formalizmusra való áttérés megszokott módja lehetetlenné válik. Ezen dinamikai rendszerek Hamilton formalizmusát így a szokásostól eltérően kell felépíteni. A Hamilton formalizmusban adódó problémák megoldása nélkül a kvantálás kanonikus útja járhatatlan.

Mindezekből látható, hogy a kényszeres rendszerek dinamikájának tanulmányozása rendkívüli fontossággal bír. Az ilyen rendszereket elsőként Dirac tanulmányozta és kidolgozta a Dirac-zárójelek módszerét. Később tökéletesítették az eljárást és a témakörről jelenleg rendkívül jó, angol nyelvű könyvek állnak rendelkezésre.

A szinguláris rendszerek közös jellemzője, hogy dinamikai kényszerekkel rendelkeznek. A kényszerek egyrészt megkötést jelentenek a kezdeti adatok lehetséges értékeire, másrészt a dinamikai változók időbeli fejlődésének egyértelműségét sem teszik lehetővé (egy kezdőállapot több végállapotba fejlődhet). Mindez összefügg a mértéktranszformációk jelenlétével.

Különbséget kell tenni kétféle kényszer: a mértékelméletekben fellelhető kényszerek, illetve a paraméteres elméletekben fellelhető kényszerek között. Előbbiekben a kényszer a fázistérben olyan fejlődést generál, mely ekvivalens állapotok során visz végig. A paraméteres elméletek esetében ez nem igaz: maga a kényszer generálhatja az időfejlődést. Példaként megemlíthető, hogy a gravitáció dinamikája egyetlen, hamiltoninak nevezett kényszerben testesül meg. Ezenkívül további három kényszer is jelen van, ezek a mértékelméletek kényszereihez hasonlatosak: ekvivalens állapotokba való fejlődést generálnak. Az e téren fellelhető problémák közül sok jelenleg még kutatás tárgyát képezi.

A dolgozatban áttekintjük a kényszeres dinamikai rendszerek általános Lagrange és Hamilton elméletét. Alkalmazásként az elektromágneses mezőt tárgyaljuk, mint a legegyszerűbb mértékelméletet. Terjedelmi okoknál fogva paraméteres elméletekről itt nem esik szó, valamint a bevezetőben említett egyéb alkalmazásokról sem.

A következőkban több helyen is az Einstein féle összegzési konvenciót használjuk: ha egy index egy kifejezésben kétszer ismétlődik, egyszer alsó, egyszer meg felső indexként, összegezni kell ezen index szerint.

A szerző köszönetét fejezi ki a Magyar Felsőoktatásért és Kutatásért Alapítványnak, melynek támogatásával ez az írás elkészülhetett, valamint Dr. Benedict Mihálynak a kézirat átolvasásáért.

II. A kényszeres dinamikai rendszerek Lagrange elmélete

Ebben a paragrafusban az $L(t, q_i, \dot{q}_i)$ Lagrange-függvénnyel jellemezhető kényszeres dinamikai rendszerek általános elméletét ismertetem. Az n darab általánosított koordináta szerinti variálásból származó n darab Euler-Lagrange egyenlet részletesen a következő alakban írható:

$$
\begin{aligned}
0 &= \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \left(\frac{\partial}{\partial t} + \dot{q}_j \frac{\partial}{\partial q_j} + \ddot{q}_j \frac{\partial}{\partial \dot{q}_j}\right)\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \\
&= V^i(t, q_i, \dot{q}_i) - W^{ij}(t, q_i, \dot{q}_i)\ddot{q}_j
\end{aligned}
\tag{2.1}
$$

Itt V és W a gyorsulásoktól *nem* függő mennyiségek. Ha W mátrix invertálható, az egyenletrendszer olyan alakra hozható, amelyben mindegyik gyorsulás külön egyenletben szerepel. A Lagrange függvényt akkor nevezzük **szinguláris**nak, ha:

$$
det(W^{ij}) := det\left(\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{q}_i \partial \dot{q}_j}\right) = 0 \tag{2.2}
$$

Bár ez a klasszikus mechanikában ritkán fordul elő, a bevezetőben felsorolt valamennyi kényszeres dinamikai rendszer Lagrange függvény szinguláris. A továbbiakban az egyszerűség kedvéért az időfüggéstől eltekintünk (explicit időfüggés esetén hasonlóak a levezetések).

Amennyiben $rang\ W = R < n$, a W mátrixnak létezik $(n-R)$ darab nulla sajátértékhez tartozó sajátvektora, jelölje ezeket $\lambda_{(r)}$, $\quad r = \overline{1, n-R}$.

$$
\lambda_{(r)i} W^{ij} = 0 \tag{2.3}
$$

A (2.1) Euler-Lagrange egyenleteket $\lambda_{(r)}$-rel szorozva így $(n-R)$ darab olyan összefüggéshez jutunk, melyek nem tartalmaznak gyorsulásokat, így ezek **Lagrange-kényszerek**:

$$
\Phi_{(r)} := \lambda_{(r)i} V^i = 0 \tag{2.4}
$$

Ezen egyenletek tulajdonképpen az Euler-Lagrange egyenletek lineáris kombinációi, melyek nem a mechanikában megszokott másodrendű differenciálegyenletek, hanem vagy elsőrendűek, vagy pedig algebrai egyenletek.

Láttuk, hogy a Lagrange-függvény szinguláris volta és a dinamika kényszeres jellege összefüggenek egymással. A kényszerekről azonban még távolról sem mondtunk el mindent.

A (2.4) kényszerek ismeretében ismét meg kell vizsgálni W rangját. Amennyiben ez kisebb R-nél, az eljárást meg kell ismételni és így újabb kényszerekhez juthatunk. Ezek elvben ismét csökkenthetik W rangját, stb. Az ezzel az eljárással előállított kényszereket nevezzők **első generációs Lagrange kényszerek**nek. A következőkben ezeket $\Phi^{(I)}$-nek jelöljük.

A kényszereket algebrai úton kombinálva egymással, csak a koordinátáktól függő (A-típusú), illetve a sebességektől is függő (B-típusú) összefüggéseket nyerhetünk:

$$\begin{aligned} &\text{A-típusú}: \qquad \Phi^{(A)}(q) = 0 \\ &\text{B-típusú}: \qquad \Phi^{(B)}(q, \dot{q}) = 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

Az A-típusú kényszerek között előfordulhatnak azonosságok is.

Tekintsünk például egy n koordinátával jellemzett dinamikai rendszert, amelynek az Euler-Lagrange egyenleteiből egy azonosság kombinálható ki. Emiatt az időfejlődést $(n-1)$ egyenlet határozza meg, melyek következő alakra hozhatók:

$$\ddot{q}_i = \ddot{q}_i(q_1, ..., q_{n-1}, \dot{q}_1, ..., \dot{q}_{n-1}; q_n, \dot{q}_n, \ddot{q}_n) \ , \qquad i = 1, ..., n-1 \tag{2.6}$$

A rendszer megoldásában q_n nyilvánvalóan tetszőleges függvényként jelenkezik. Így a rendszer időfejlődése nem egyértelmű a kezdeti feltételek megadása esetén sem. Tegyük ehhez hozzá, hogy általában a kényszerek miatt már a kezdőfeltételek sem választhatók meg tetszőlegesen, hanem csak úgy, hogy a kényszerek ne sérüljenek. Mindezek jellemző tulajdonságai a mértékelméleteknek.

Az első generációs kényszerek A és B típusú kényszerekre való szétválasztására mindössze azért volt szükség, mert az A típusú kényszerek első időderiváltja nem tartalmaz gyorsulásokat, így szintén kényszer. A deriválással előállított kényszereket **második generációs Lagrange kényszerek**nek nevezzük. Ezek, illetve lineáris kombinációik lehetnek szintén A és B típusúak. Új A típusú kényszerekből deriválással újabb kényszerek nyerhetők, stb.

Az eljárást mindaddig ismételjük, míg az összes A típusú kényszer időderiváltja előáll B típusú kényszerek lineáris kombinációjaként. A B típusú kényszerek időderiváltja gyorsulásokat tartalmaz, így vagy a már meglévő Euler-Lagrange egyenletek kombinációja, vagy pedig új dinamikai egyenlet. A kényszerek idő deriváltjának eltűnését azért kell megkövetelni, mert a kényszereknek nem csak kezdetben, hanem minden pillanatban teljesülniük kell.

A Lagrange formalizmusban tehát az első, illetve második generációs, illetve A és B típusú osztályozások keresztezéséből a következő típusú kényszerek adódnak:

$$\Phi^{(I,A)}\ , \quad \Phi^{(I,B)}\ , \quad \Phi^{(II,A)}\ , \quad \Phi^{(II,B)}\ . \tag{2.7}$$

Elvben az A típusú (holonóm) kényszerek a konfigurációs tér megfelelő szűkítésével kiküszöbölhetők.

Végül néhány megjegyzés:

i. A Lagrange függvény szinguláris jellege a választott koordinátarendszertől független állítás.

ii. A Lagrange függvény szinguláris jellege miatt a Hamilton formalizmusra való áttérés szokásos módja járhatatlan. Ugyanis

$$p^i(q_j, \dot{q}_j) = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \tag{2.8}$$

egyenletek akkor és csakis akkor invertálhatók a $\dot{q}$ sebességekre nézve, ha $det(W) \neq 0$, vagyis a rendszer nem szinguláris. Ellenkező esetben valamennyi sebesség nem fejezhető ki a kanonikus változók segítségével.

iii. Fordítva, ha a Hamilton-formalizmusból szeretnénk visszatérni a Lagrange formalizmushoz, a

$$\dot{q}_i = \frac{\partial H}{\partial p} \tag{2.9}$$

összefüggéseket kell invertálni az impulzusokra nézve. Ez akkor lehetséges, ha

$$det\left(\frac{\partial^2 H}{\partial p^i \partial p^j}\right) \neq 0 \tag{2.10}$$

teljesül. Belátható azonban, hogy ez utóbbi koordinátarendszer függő állítás. Minden Hamilton függvény szingulárissá tehető alkalmas kanonikus transzformációval.

III. A kényszeres dinamikai rendszerek Hamilton elmélete

III.a. Elsődleges kényszerek, gyenge és erős egyenlőség

Az eddigiekből kiderült, hogy a szinguláris rendszerek Hamilton elméletét nem lehet a szokásos módon felépíteni. A megfelelő Hamilton formalizmust az ebben a paragrafusban bemutatásra kerülő Dirac-Bergmann algoritmus segítségével nyerhetjük.

Az előző paragrafusban már láttuk azt, hogy a szingularitás (2.2) feltételének teljesülése esetén az impulzusok (2.8) kifejezései csak részben invertálhatók a sebességekre nézve. A részben végrehajtott invertálás eredménye:

$$\begin{aligned} \dot{q}_\alpha &= \psi_\alpha(q_i, p^\beta, \dot{q}_A) , \qquad && i = \overline{1,n} , \quad \alpha,\beta = \overline{1,R} \\ p^B &= \kappa^B(q_i, p^\beta) , && A,B = \overline{R+1,n} \end{aligned} \tag{3.1}$$

Itt feltettük, hogy a koordináták alkalmas átrendezésével pontosan az első R darab sebesség fejezhető ki a kanonikus változók és a többi sebesség függvényében. (3.1) második összefüggésével kapcsolatosan vegyük észre, hogy a sebességekre nézve nem invertálható $(n-R)$ egyenlet nem tartalmazhatja $\dot{q}_A$-kat, ellenkező esetben ezek is kifejezhetők lennének, így $rang(W) > R$ lenne. A vizsgált $(n-R)$ egyenlet tehát csak $\dot{q}_\alpha$-kat tartalmaz, de ezek kiküszöbölhetők (3.1) első relációinak segítségével. Az $(n-R)$ darab

$$\phi^B := p^B - \kappa^B(q_i, p^\beta) = 0 \tag{3.2}$$

összefüggések **elsődleges hamiltoni kényszer**ek. Ezek a fázistéren egy felületet határoznak meg, az ún. **kényszerfelület**et (Σ). A hamiltoni kényszereket ϕ-vel jelöljük, a Φ-vel jelölt Lagrange függvényektől való megkülönböztetés céljából.

A következőkben bevezetjük ezen kényszerfelületekhez kapcsolódó **gyenge**, illetve **erős egyenlőségek** fogalmát.

Két függvény, f és g gyengén egyenlő, ha a kényszerfelületek pontjain azonos értékeket vesznek fel:

$$f(q,p) \approx g(q,p) \tag{3.3}$$

Két függvény, f és g erősen egyenlő, ha gyengén egyenlőek és a kényszerfelületen a gradienseik is egyenlőek:

$$\Big(f(q,p)\equiv g(q,p)\Big) \;\Leftrightarrow\; \begin{pmatrix} f(q,p)\approx g(q,p) & & \\ \dfrac{\partial f}{\partial q}\approx\dfrac{\partial g}{\partial q} & \textit{és} & \dfrac{\partial f}{\partial p}\approx\dfrac{\partial g}{\partial p}\end{pmatrix} \tag{3.4}$$

Állítás:

$$(f\approx g)\Rightarrow\left(f-\phi^B\frac{\partial f}{\partial p_B}\equiv g-\phi^B\frac{\partial g}{\partial p_B}\right) \tag{3.5}$$

bizonyítás: tekintsünk Σ-n két infinitezimálisan közeli pontot. A két pont koordinátáinak különbségei (3.2) kényszerek miatt nem függetlenek:

$$\delta q_i\ ,\quad \delta p^\beta\ ,\quad \delta p^B=\frac{\partial\kappa^B}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial\kappa^B}{\partial p^\beta}\delta p^\beta \tag{3.6}$$

Amennyiben $f\approx g$, úgy

$$\delta f\approx\delta g \tag{3.7}$$

(3.6) miatt δf következőképpen írható:

$$\begin{aligned}\delta f &= \frac{\partial f}{\partial q_i}\delta q_i+\frac{\partial f}{\partial p^\beta}\delta p^\beta+\frac{\partial f}{\partial p^B}\delta p^B\ = \\ &= \left(\frac{\partial f}{\partial q_i}+\frac{\partial f}{\partial p^B}\,\frac{\partial\kappa^B}{\partial q_i}\right)\delta q_i\ +\ \left(\frac{\partial f}{\partial p^\beta}+\frac{\partial f}{\partial p^B}\,\frac{\partial\kappa^B}{\partial p^\beta}\right)\delta p^\beta\end{aligned} \tag{3.8}$$

Hasonló kifejezés írható fel δg -re is. Mivel δq_i és δp^β egymástól függetlenek, (3.7)-ből kétféle gyenge egyenlőség adódik:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial q_i}\ +\ \frac{\partial f}{\partial p^B}\,\frac{\partial\kappa^B}{\partial q_i}&\approx\frac{\partial g}{\partial q_i}\ +\ \frac{\partial g}{\partial p^B}\,\frac{\partial\kappa^B}{\partial q_i}\\ \frac{\partial f}{\partial p^\beta}\ +\ \frac{\partial f}{\partial p^B}\,\frac{\partial\kappa^B}{\partial p^\beta}&\approx\frac{\partial g}{\partial p^\beta}\ +\ \frac{\partial g}{\partial p^B}\,\frac{\partial\kappa^B}{\partial p\beta}\end{aligned} \tag{3.9}$$

amelyek (3.2) kényszerek segítségével kifejezve:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial q_i}\left(f\ -\ \phi^B\frac{\partial f}{\partial p^B}\right)&\approx\frac{\partial}{\partial q_i}\left(g\ -\ \phi^B\frac{\partial g}{\partial p^B}\right)\\ \frac{\partial}{\partial p^\beta}\left(f\ -\ \phi^B\frac{\partial f}{\partial p^B}\right)&\approx\frac{\partial}{\partial p^\beta}\left(g\ -\ \phi^B\frac{\partial g}{\partial p^B}\right)\end{aligned} \tag{3.10}$$

Végül észrevesszük, hogy utóbbi egyenlőségben az 1-től R-ig futó β index $i=\overline{1,n}$ indexre cserélhető, mert az $(R+1)$-től n-ig futó indexek esetében (3.10) mindkét oldala gyengén eltűnik:

$$\frac{\partial}{\partial p^A}\left(f\ -\ \phi^B\frac{\partial f}{\partial p^B}\right)\ =\ \frac{\partial f}{\partial p^A}\ -\ \delta^{AB}\frac{\partial f}{\partial p^B}\ -\ \phi^B\frac{\partial^2 f}{\partial p^A\partial p^B}\approx 0 \tag{3.11}$$

Q.E.D.

Az előbb bizonyított állításnak van egy fontos következménye. Ha a g függvényt nullának választjuk:

$$(f \approx 0) \Rightarrow \left(f \equiv \phi^B \frac{\partial f}{\partial p^B}\right) \tag{3.12}$$

vagyis **a gyengén eltűnő függvények a kényszerek lineáris kombinációi**!

Megjegyezzük még, hogy a gyenge egyenlőségeket csak a számolások legvégén szabad felhasználni. Tehát a Poisson zárójeleket is az egész fázistéren számoljuk és csak ezután szűkítjük le értéküket a kényszerfelületre.

III.b. Legendre transzformáció, másodlagos kényszerek

Az impulzusoknak a sebességekre nézve csak részben lehetséges invertálhatósága folytán a Legendre transzformáció végeredménye egy "hibrid", koordinátáktól, impulzusoktól és sebességektől egyaránt függő kifejezés, amit a továbbiakban kanonikus Hamilton függvénynek nevezünk:

$$H_C(q_i, p^\beta, \dot{q}_A) = p^i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}) \tag{3.13}$$

Állítás:

$$\begin{aligned} &1^o \; H_C = H_C(q_i, p^\beta) \\ &2^o \; \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H_C}{\partial p^\alpha} - \dot{q}_A \frac{\partial \kappa^A}{\partial p^\alpha} \\ &3^o \; \dot{p}^i = -\frac{\partial H_C}{\partial q_i} + \dot{q}_A \frac{\partial \kappa^A}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{3.14}$$

bizonyítás: felhasználva $\dot{q}_\alpha$ és p^A (3.1) kifejezéseit a kanonikus Hamilton függvény (3.13) kifejezésében, majd rendre a változói szerinti parciális deriváltakat képezve:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial H_C}{\partial q_i} = \dot{q}_A \frac{\partial \kappa^A}{\partial q_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} \\ &\frac{\partial H_C}{\partial p^\alpha} = \dot{q}_\alpha + \dot{q}_A \frac{\partial \kappa^A}{\partial q_i} \;\rightarrow\; \dot{q}_\alpha = \frac{\partial H_C}{\partial p^\alpha} - \dot{q}_A \frac{\partial \kappa^A}{\partial p^\alpha} \\ &\frac{\partial H_C}{\partial \dot{q}_A} = 0 \end{aligned} \tag{3.15}$$

Az állítás első és második része ezzel bizonyítást nyert, a harmadik részhez az impulzusok definicióját, az Euler-Lagrange egyenleteket valamint (3.15) első egyenletét használjuk:

$$\dot{p}^i = \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = -\frac{\partial H_C}{\partial q_i} + \dot{q}_A \frac{\partial \kappa^A}{\partial q_i} \tag{3.16}$$

Q.E.D.

Érdekes következménye az előbbi állításnak, hogy a kanonikus Hamilton függvény csak a kényszerfelületen értelmezett, mivel p^B-től nem, hanem csak (q_i, p^β)-tól függ, és a p^B változók csak a kényszerfelületen fejezhetők ki utóbbiak függvényében. Mivel az egész fázistéren értelmezett Poisson zárójeleket kell használnunk, célszerű H_C helyett egy valamilyen, az egész fázistéren értelmezett H Hamilton függvényt használni, amely H_C-vel erősen egyenlő. Egyéb kikötés H-ra nincs, ez tulajdonképpen tehát H_C-nek tetszőleges kiterjesztése az egész fázistérre. A kiterjesztés azért tetszőleges, mert a fizikai történések mindenképpen a kényszerfelületen zajlanak.

A (3.15), (3.16) kanonikus egyenletek a (3.2) kényszerek segítségével következő alakra hozhatók:

$$\begin{aligned} \dot{q}_\alpha &\approx \frac{\partial H}{\partial p^\alpha} + \dot{q}_A \frac{\partial \phi^A}{\partial p^\alpha} \\ \dot{p}^i &\approx -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \dot{q}_A \frac{\partial \phi^A}{\partial q_i} \end{aligned} \tag{3.17}$$

Az α index az első egyenletben i-re változtatható, mert $i = A$ esetekben mindkét oldal $\dot{q}_A$.

Vezessük be az **elsődleges Hamilton függvény**t:

$$H_P = H + \phi^B \dot{q}_B \tag{3.18}$$

Segítségével a kanonikus egyenletek a megszokott alakban írhatók:

$$\begin{aligned} \dot{q}_i &\approx \frac{\partial H_P}{\partial p^i} = \{q_i, H_P\} \\ \dot{p}^i &\approx -\frac{\partial H_P}{\partial q_i} = \{p_i, H_P\} \end{aligned} \tag{3.19}$$

A gyakorlatban az elsődleges Hamilton függvényben H helyett H_C-t használhatjuk.

Tetszőleges függvény időfejlődését így

$$\frac{df}{dt} \;=\; \frac{\partial f}{\partial q_i}\dot{q}_i + \frac{\partial f}{\partial p^i}\dot{p}^i \approx \frac{\partial f}{\partial q_i}\frac{\partial H_P}{\partial p^i} - \frac{\partial f}{\partial p^i}\frac{\partial H_P}{\partial q_i} \;=\; \{f, H_P\} \tag{3.20}$$

adja meg.

Az egész fázistéren értelmezett Poisson zárójelek használatának ára az, hogy a mozgásegyenletek gyenge egyenlőségek, a kanonikus Hamilton függvény helyett pedig az elsődleges Hamilton függvény szerepel.

Akárcsak a Lagrange formalizmusban, itt is biztosítani kell azt, hogy a kényszeregyenletek minden időpontban teljesüljenek:

$$0 \approx \dot{\phi}^A = \{\phi^A, H_P\} = \{\phi^A, H\} + \dot{q}_B\{\phi^A, \phi^B\} \tag{3.21}$$

Ezen egyenletek vagy (gyenge) azonosságok, vagy meghatározzák az ismeretlen $\dot{q}_A$-k valamelyikét, vagy pedig új kényszerek. Utóbbi esetben az idNew deriválást meg kell ismételni, stb. Az így előállítoott kényszereket **másodlagos hamiltoni kényszerek**nek nevezzük. Az eljárás során az ismeretlen $\dot{q}_B$ együtthatók egy része meghatározottá válhat.

Bizonyítás nélkül jegyezzük meg, hogy az első generációs Lagrange kényszerek az elsődleges hamiltoni kényszerek időderiváltjainak lineáris kombinációi. Létezik, egy ezidáig még helytálló sejtés is, miszerint az összes Lagrange kényszer ismeretében az összes hamiltoni kényszer következményként előáll.

III.c. A kényszerek új osztályozása: első és másodosztályú kényszerek

A hamiltoni kényszerek elsődleges, illetve másodlagos jellege nem annyira fontos, mint az ebben a paragrafusban bevezetendő osztályozásuk.

Egy hamiltoni kényszert **elsőosztályú**nak nevezünk $\phi^{(I)}$, ha:

$$\{\phi^{(I)}, \phi^B\} \approx 0 \tag{3.22}$$

az összes B-re. A kényszert **másodosztályú**nak nevezzük $\phi^{(II)}$, ha (3.22) nem teljesül. A hamiltoni kényszerekre a következő jelöléseket vezetjük be:

$$\begin{aligned} &\textit{elsőosztályú elsődleges kényszer}: & \phi^{(I,1)} \\ &\textit{elsőosztályú másodlagos kényszer}: & \phi^{(I,2)} \\ &\textit{másodosztályú elsődleges kényszer}: & \phi^{(II,1)} \\ &\textit{másodosztályú másodlagos kényszer}: & \phi^{(II,2)} \end{aligned} \tag{3.23}$$

A (3.20) kanonikus egyenletekben szereplő (3.18) elsődleges Hamilton függvény tartalmazza az elsődleges kényszerek sebességekkel vett lineáris kombinációját. Az új osztályozás ismeretében ez a kifejezés következőképpen részletezhető:

$$\dot{q}_B \phi^B = u^C \phi_C^{(I,1)} + v^c \phi_c^{(II,1)} \tag{3.24}$$

Itt a nagybetűs indexek az elsőosztályú, a kisbetűsek pedig másodosztályú kényszerek szerinti összegzéseket jelölik. Az elsődleges, illetve másodlagos kényszerek időmegmaradása következőképpen írható:

$$\begin{aligned}
&\{\phi_D^{(I,1)}, H\} \approx 0 \\
&\{\phi_d^{(II,1)}, H\} + v^c \{\phi_d^{(II,1)}, \phi_c^{(II,1)}\} \approx 0 \\
&\{\phi_D^{(I,2)}, H\} \approx 0 \\
&\{\phi_d^{(II,2)}, H\} + v^c \{\phi_d^{(II,2)}, \phi_c^{(II,1)}\} \approx 0
\end{aligned} \tag{3.25}$$

Mivel az u^C együtthatók eltűntek az egyenletekből, ezek meghatározása már nem lehetséges, így tetszőleges függvények maradnak. **A megoldásban szereplő tetszőleges függvények száma így megegyezik az elsődleges elsőosztályú kényszerek számával**.

Könnyen belátható az, hogy a másodosztályú kényszerek egymással vett Poisson zárójeleiből alkotott mátrix reguláris a kényszerfelületen. (Ellenkező esetben a másodosztályú kényszerek valamilyen lineáris kombinációja elsőosztályú kellene hogy legyen, ami nem lehetséges.) Ez a mátrix, mivel antiszimmetrikus, páros dimenziójú kell legyen, így a másodosztályú kényszerek mindig páros számban fordulnak elő.

Mivel a másodosztályú kényszerek egymással vett Poisson zárójeleiből alkotott mátrix invertálható, (3.25) második és negyedik egyenletéből:

$$\begin{aligned}
&v^c \approx -\{\phi^{(II,1)}, \phi^{(II)}\}^{-1\ cd} \{\phi_d^{(II)}, H\} \\
&\{\phi^{(II,2)}, \phi^{(II)}\}^{-1\ cd} \{\phi_d^{(II)}, H\} \approx 0
\end{aligned} \tag{3.26}$$

összefüggések adódnak. Ezeket majd a mozgásegyenletek egyszerűbb alakban való írására használjuk.

III.d. A teljes és bővített Hamilton függvény, a Dirac zárójel

Az időfejlődést jellemző (3.20) gyenge egyenlőség (3.24) és (3.26) felhasználásával következő alakot ölti:

$$\frac{df}{dt} \approx \{f, H\} + u^C\{f, \phi_C^{(I,1)}\} - \{f, \phi_c^{(II)}\}\{\phi^{(II)}, \phi^{(II)}\}^{-1\ cd}\{\phi_d^{(II)}, H\} \tag{3.27}$$

Érdekes módon a másodosztályú kényszerek közül úgy az elsődlegesek, mint a másodlagosak szerepelnek a fenti összefüggésben, míg az elsőosztályúak közül csak az elsődlegesek.

A (3.27) összefüggés egyszerűbb alakját nyerjük a **teljes Hamilton függvény** bevezetése után:

$$H_T = H + u^C \phi_C^{(I,1)} \tag{3.28}$$

Dirac javasolta, hogy az elsődleges és másodlagos elsőosztályú hamiltoni kényszerek egyenrangúan szerepeljenek egy **bővített Hamilton függvény**ben:

$$H_E = H_T + w^{C'} \phi_{C'}^{(I,2)} \tag{3.29}$$

Jelenleg a különböző szerzők véleményei eltérnek abban, hogy a teljes vagy pedig a bővített Hamilton függvényt kell-e használni a dinamikai egyenletekben. A kétféle nézőpont szerint az is különbözik, hogy mit nevezhetünk **megfigyelhető mennyiség**nek. Egy F megfigyelhető mennyiségről ugyanis joggal várjuk el azt, hogy klasszikus méréskor az elmélet alapján megjósolható értéket vegyen fel. Ez a feltétel azonban nem teljesülhet, ha az F időfejlődését leíró egyenlet tetszőleges függvényeket tartalmaz. Attól függően, hogy az egyenletben melyik Hamilton függvény szerepel, ezen függvények száma is változhat. Általánosan elfogadott kritériuma egy mennyiség megfigyelhetőségének az, hogy a teljes, illetve a bővített Hamilton függvénnyel vett Poisson zárójele legyen gyengén eltűnő.

Megjegyezzük, hogy az eddig bevezetett Hamilton függvények: H_C, H, H_P, H_T és H_E mind megegyeznek a kényszerfelületen.

Vezessük be a **Dirac zárójel** fogalmát:

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \phi_c^{(II)}\}\{\phi^{(II)}, \phi^{(II)}\}^{-1\ cd}\{\phi_d^{(II)}, g\} \tag{3.30}$$

Ennek segítségével a (3.27) dinamikai egyenlet

$$\frac{df}{dt} \approx \{f, H_P\} \ = \ \{f, H_T\}_D \tag{3.31}$$

alternatív alakokban írható.

A Dirac zárójel tulajdonképpen egy általánosított Poisson zárójel, vagyis a fundamentális zárójelek megszokott értékeitől eltekintve a Poisson zárójel összes tulajdonságával rendelkezik:

- antiszimmetrikus
- lineáris mindkét argumentumában
- ha egyik függvény állandó, a Dirac zárójel nulla
- érvényes a Jacobi azonosság
- szorzat Dirac zárójele: $\{fg, h\}_D = f\{g, h\}_D + \{f, h\}_D g$
- a másodosztályú kényszerek tetszőleges függvénnyel vett Dirac zárójele nulla.

Az utóbbi tulajdonság fontossága abban rejlik, hogy a másodosztályú kényszerek már a Dirac zárójelek számolása előtt nullává tehetők, szemben a Poisson zárójelekkel. Így a másodosztályú kényszerek megoldására lehet törekedni, amivel a fázistér dimenziója csökkenthető. Mivel a másodosztályú kényszerek páros számban fordulnak elő, a redukált fázistér páros dimenziója biztosítva van.

IV. Elektrodinamika

A Maxwell egyenletek talán a legismertebb kényszeres dinamikai rendszert írják le. Ebben a részben az előző két fejezetben ismertetett általános elméletet fogjuk alkalmazni az elektromágneses mező esetére.

IV.a. Kovariáns tárgyalás

Jól ismert, hogy a vákuumbeli Maxwell egyenleteket megadó hatás:

$$I[A^1, .., A^4] = \int d^4x F_{ab}(x) F^{ab}(x) \tag{4.1}$$

ahol a kanonikus koordináták az $A^a = (\Phi, A_\alpha)$ a skalár és vektor potenciálokból képezett négyespotenciál komponensei, $F_{ab} = \partial_a A_b - \partial_b A_a$ az elekromágneses tértenzor és az indexeket $\eta_{ab} = diag(-1,1,1,1)$ Minkowski metrikával, illetve $\eta^{ab} = diag(-1,1,1,1)$ inverz metrikával húzzuk le és föl. A latin indexek 0-tól 3-ig, a görög indexek 1-től 3-ig futnak. Az elektromos, illetve mágneses mezők:

$$\begin{aligned} E_\alpha &:= F_{\alpha 0} = \partial_\alpha A_0 - \partial_0 A_\alpha = -\partial_\alpha \Phi - \dot{A}_\alpha \\ B_\alpha &:= \frac{1}{2}\epsilon_\alpha^{\beta\gamma} F_{\beta\gamma} = \epsilon_\alpha^{\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma \end{aligned} \tag{4.2}$$

Vektor jelölésmódban fenti egyenletek a térerősségek jólismert kifejezését adják a potenciálok függvényében.

$$\vec{E} = -grad\Phi - \dot{\vec{A}} \; , \qquad \vec{B} = rot\vec{A} \tag{4.3}$$

Az F_{ab} illetve $\vec{E}, \vec{B}$ definiciójának következménye a Maxwell egyenletek egyrésze:

$$\begin{aligned} &\partial_{[c} F_{ab]} = 0 \; , \qquad \text{illetve} \\ &\dot{\vec{B}} = -rot\vec{E} \; , \qquad div\vec{B} = 0 \end{aligned} \tag{4.4}$$

melyek így azonosságok. Fenti képletben a szögletes zárójel az összes index szerinti antiszimmetrizációt jelenti.

A (4.1) hatás variációja szolgáltatja a fennmaradó Maxwell egyenleteket:

$$\begin{aligned} &\partial^b F_{ba} = 0 \; , \qquad \text{illetve} \\ &div\vec{E} = 0 \; , \qquad \dot{\vec{E}} = rot\vec{B} \end{aligned} \tag{4.5}$$

Látható, hogy ezen egyenletek nem változnak meg, ha a potenciálokat

$$A^a \;\to\; A^{'a} = A^a + \partial^a \kappa \tag{4.6}$$

tetszőleges κ függvénnyel képezett mérték transzformációnak vetjük alá.

IV.b. Kanonikus tárgyalás

A kanonikus tárgyalásmód lényege, szemben a kovariáns tárgyalásmódal az, hogy az időkoordinátát megkülönböztetetten kezeli. Ez mindannyiszor szükséges, ha időfejlődést tanulmányozunk.

Tekintsük elsőként a Lagrange formalizmus kanonikus tárgyalását. A (4.4) Maxwell egyenletek részletesen a következő alakban írhatók:

$$\begin{aligned} a = 0: \qquad & 0 = \Delta A_0 - \frac{\partial}{\partial t}(div\vec{A}) = div\vec{E} \\ a = \alpha: \qquad & 0 = -\ddot{A}_\alpha + \Delta A_\alpha - \partial_\alpha div\vec{A} + \partial_0\partial_\alpha A_0 \end{aligned} \tag{4.7}$$

Mivel az első egyenletben nem fordul elő második időderivált, ez első generációs B-típusú Lagrange kényszer. A második egyenlet dinamikai egyenlet. A harmadik fejezetben leírt általános eljárás segítségével is megtalálhatjuk a kényszert, következőképpen. $W_{ab} = diag(0,1,1,1)$ mátrix szinguláris, a nulla sajátértékhez tartozó sajátvektora $\lambda = (1,0,0,0)$, melynek segítségével képezett Lagrange kényszer pontosan (4.7) első egyenlete. Ez a kényszer nem más, mint Gauss törvénye vákuumban.

Mivel a kényszer minden pillanatban kell hogy teljesüljön., megköveteljük az időderiváljának az eltűnését. Erről azonban belátható, hogy azonosság. Így kényszeres szempontból az elektrodinamika az egyszerűbb elméletek közé tartozik, mindössze egy Lagrange kényszerrel rendelkezik. (Egészen pontosan a kényszerek száma $1 \times \infty$, mivel itt már mezőkkel kell dolgozni, azaz minden pontban van egy kényszer.)

Bizonyítás nélkül jegyezzük meg, hogy a Gauss kényszer a mérték invariancia következményeként egy ún. általánosított Bianchi azonosságként is előáll.

A következőkben az elektrodinamika Hamilton formalizmusát vizsgáljuk. Az impulzusok:

$$\begin{aligned} & \Pi_a = F_{0a} \qquad azaz \\ & \Pi_0 = 0\ , \qquad \Pi_\alpha = \dot{A}_\alpha - \partial_\alpha A_0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

Mint ahogyan az várható volt, az általánosított sebességek közül csak $\dot{A}_\alpha$ fejezhetők ki a kanonikus változók segítségével, és találtunk egy elsődleges Hamilton kényszert is:

$$\phi^{(1)} := \Pi_0 \approx 0 \tag{4.9}$$

A kanonikus Hamilton függvény (egy teljes divergencia elhagyása után):

$$H_C = \int d^3x \left(\frac{1}{2}\Pi_\alpha \Pi^\alpha - A_0 \partial_\alpha \Pi^\alpha + \frac{1}{4} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} \right) \tag{4.10}$$

Az elsődleges Hamilton függvény pedig:

$$H_P = H_C + \int d^3x \; u_1(x) \Pi_0(x) \tag{4.11}$$

Az elsődleges kényszer időderiváltja:

$$0 \approx \{\phi^{(1)}, H_P\} = \partial_\alpha \Pi^\alpha = \phi^{(2)} \tag{4.12}$$

egy másodlagos kényszer, ami nem más, mint az (4.7)-ban felírt Gauss kényszer. Ezen kényszer időderiváltja azonosság. Így a Hamilton formalizmusban mindössze két kényszer van. Mivel

$$\{\phi^{(1)}, \phi^{(2)}\} = 0 \tag{4.13}$$

mindkét kényszer elsőosztályú. Másodosztályú kényszerek hiányában a Dirac és Poisson zárójelek között nincs különbség.

A megoldásban az egy darab elsődleges elsőosztályú kényszernek megfelelő tetszőleges függvény szerepel majd. A potenciálok egyértelmű meg nem határozottsága megint csak a mérték invariancia következménye.

A teljes és a bővített Hamilton függvények:

$$\begin{aligned} H_T &= H_C + \int d^3x \; u_1(x) \Pi_0(x) = H_P \\ H_E &= H_C + \int d^3x \Big[u_1(x) \Pi_0(x) \; + \; u_2(x) \partial_\alpha \Pi^\alpha(x) \Big] \end{aligned} \tag{4.14}$$

A fázistér dimenziója $2 \times 4 = 8$. Mivel két elsőosztályú kényszer van, a redukált fázistér dimenziója $8 - 2 \times 2 = 4 = 2 \times 2$, azaz valójában csak két szabadsági foka van az elektromágneses mezőnek. A szabadsági fokok megkeresése kétféleképpen is történhet, ezeket tekintjük át vázlatosan a következő két paragrafusban.

IV.c. Redukált fázistér előállítása a szabadsági fokok kiválasztásával

Helmholtz nevéhez fűződik az az állítás, miszerint minden $\vec{A}$ vektormező (egy állandó vektor erejéig) egyértelműen bontható fel egy forrásmentes (divergenciamentes) és egy örvénymentes (rotációmentes) vektorra:

$$A_\alpha = A_\alpha^T + A_\alpha^L \;, \quad \partial^\alpha A_\alpha^T = 0 \;, \quad \epsilon^{\alpha\beta\gamma}\partial_\beta A_\gamma^L = 0 \;\rightarrow\; A_\gamma^L = \partial_\gamma \Psi \tag{4.15}$$

A részletes számolások elvégzésével beláthatjuk a következőket:

a. A tranzverzális módusok fundamentális Poisson zárójelei:

$$\begin{aligned} &\{A_\alpha^T(x), \Pi_\beta^T(y)\}_{x^0=y^0} = \delta_{\alpha\beta}\delta(\vec{x}-\vec{y}) \\ &\{A_\alpha^T(x), \Pi_\beta^L(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \;, \quad \{A_\alpha^T(x), \Pi_0(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \\ &\{A_\alpha^L(x), \Pi_\beta^T(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \;, \quad \{A_0(x), \Pi_\beta^T(y)\}_{x^0=y^0} = 0 \end{aligned} \tag{4.16}$$

b. A_α^T megfigyelhető mennyiségek, mert:

$$\{A_\alpha^T, \phi^{(1)}\}_{x^0=y^0} = \{A_\alpha^T, \phi^{(2)}\}_{x^0=y^0} = 0 \tag{4.17}$$

c. A_0 nem megfigyelhető mennyiség, mert:

$$\{A_0, \phi^{(1)}\}_{x^0=y^0} = \{A_0, \Pi_0\}_{x^0=y^0} = \delta(\vec{x}-\vec{y}) \neq 0 \tag{4.18}$$

d. végül A_α^L szintén nem megfigyelhető mennyiség, mivel (4.8) második egyenletéből

$$\dot{A}_\alpha^L = \Pi_\alpha^L + \partial_\alpha A_0 \quad \rightarrow \quad A_\alpha^L = f(A_0) \tag{4.19}$$

következik, és A_0 semmilyen függvénye nem lehet megfigyelhető mennyiség.

Fentiekből következik, hogy **az elektromágneses mező szabadsági fokait a potenciál tranzverzális módusai képviselik**.

Ez utóbbi következtetés lezárja azon vitákat, hogy a potenciálok vagy pedig a térerősségek-e az elsődleges változói az elméletnek. Ez a kérdés felmerült az

Aharonov-Bohm effektus kapcsán is, amelyben szintén a potenciál tranzverzális része játszik szerepet.

IV.d. Redukált fázistér előállítása mérték típusú kényszerek segítségével

A redukált fázistér előállításának másik módja az, hogy az elmélethez kívülről kényszereket adunk. Ez az eljárás jól ismert: a gyakorlatban Coulomb mértékben, Lorentz mértékben stb. szoktuk az elektrodinamikai számolásokat végezni, így oldva fel az elméletben jelenlevő mérték szabadságot.

A leggyakrabban használt mértékek az elektrodinamikában:

a. Lorentz mérték: $\partial_a A^a = 0$. Ez nem szünteti meg teljesen a mérték szabadságot, további mérték transzformációk végezhetők ugyanis $\partial^a \partial_a \epsilon = 0$ feltételnek eleget tevő ϵ függvény segítségével.

b. Coulomb mérték: $\partial_\alpha A^\alpha = 0$

c. Temporális mérték: $A_0 = 0$

d. Sugárzási mérték: $\partial_\alpha A^\alpha = 0$ és $A_0 = 0$

e. Axiál mérték: $\Pi_3 + \partial_3 A_0 = 0$ és $A_3 = 0$

Vizsgáljuk részletesebben a sugárzási mértéket. Némi számolás után belátható, hogy az elmélethez adott két új kényszer

$$\Psi_1 = A_0 \approx 0 \quad \text{és} \quad \Psi_2 = \partial_\alpha A^\alpha \approx 0 \tag{4.20}$$

megszünteti a mérték szabadságot. A régi $\phi^{(1,2)}$ kényszereknek az új $\Psi_{1,2}$ kényszerekkel vett Poisson zárójelei már nem tűnnek el, így négy darab másodosztályú kényszert tartalmazó elméletünk van. A gyenge egyenlőségek erős egyenlőséggé való konvertálása céljából célszerű a Dirac zárójeleket használni, melyek most már különböznek a Poisson zárójelektől.

Jelölje a másodosztályú kényszerek egymással képezett Poisson zárójeleiből álló mátrixot M. A mátrix sor, illetve oszlopindexeit a kényszerek $\phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \Psi_1, \Psi_2$

sorrendje határozza meg.

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\Delta \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \Delta & 0 & 0 \end{pmatrix} \delta(\vec{x}-\vec{y}) \tag{4.21}$$

ahol Δ a Laplace operátor. Az M mátrix $\delta(\vec{x}-\vec{y})$ függvényre nézve képezett inverze:

$$M^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \\ \delta(\vec{x}-\vec{y}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{4.22}$$

Így két mennyiség Dirac-zárójele:

$$\{f(x), g(y)\}_D = \{f(x), g(y)\} - \int\int d\vec{u} d\vec{v} \{f(x), \Psi^\alpha(u)\} M^{-1}_{\alpha\beta} \{\Psi^\beta(v), g(y)\} \tag{4.23}$$

ahol $\Psi^\alpha = \phi^{(1)}, \phi^{(2)}, \Psi_1, \Psi_2$ kényszereket jelöli, és a Dirac illetve Poisson zárójeleket azonos $x^0 = y^0$ időben számoljuk.

Ebből származtathatók a fundamentális Dirac zárójelek is, úgymint:

$$\begin{aligned} \{A_a(x), \Pi^b(y)\}_D &= (\delta_a^b + \delta_a^0 \eta^{b0})\delta(\vec{x}-\vec{y}) - \partial_a \partial^a \frac{1}{4\pi|\vec{x}-\vec{y}|} \\ \{A_a(x), A_b(y)\}_D &= \{\Pi^a(x), \Pi^b(y)\}_D = 0 \end{aligned} \tag{4.24}$$

Az első fundamentális Dirac zárójel nyilvánvalóan nem egyenlő a Dirac delta függvénnyel. Az $a = \alpha$, $b = \beta$ esetben az egyenlet jobboldalát tranzverzális delta függvénynek nevezzük. Az elektrodinamika szokványos tárgyalásában a tranzverzális delta függvényt "kézzel" vezetik be az elméletbe, abból a célból, hogy feloldják a potenciálok térszerű komponenseinek Poisson zárójelei és a Gauss törvény között fennálló inkonzisztenciát. Az elektrodinamika kényszeres tárgyalásmódjában a tranzverzális delta függvény természetes módon adódik.

A sugárzási mértékkel kapcsolatos tárgyalásunkat azzal a megjegyzéssel zárjuk, hogy a szabadsági fokokat képviselő tranzverzális potenciálok és kanonikus impulzusaik közötti Dirac zárójelek egybeesnek ezen mennyiségek Poisson zárójeleivel.

AJÁNLOTT IRODALOM

[1] Dirac: Lectures on Quantum Mechanics *Yeshiva University Press (1964)*

[2] Sudarshan, Mukunda: Classical Dynamics. A Modern Perspective *Wiley (1974)*

[3] Hanson, Regge, Teitelboim: Constrained Hamiltonian Systems *Academia Nationale dei Lincei (1976)*

[4] Sundermayer: Constrained Dynamics *Springer (1982)*

[5] Esposito: Quantum Gravity, Quantum Cosmology and Lorentzian Geometries, második kiadás, II. fejezet *Springer (1994)*

magyar nyelven:

[6] Balog János: Relativisztikus térelmélet, Bevezetés a fizika térelméleti módszereibe, IV. fejezet *ELTE Budapest 1981*

KÉNYSZERES DINAMIKAI RENDSZEREK II

Gergely Árpád László

T A R T A L O M

I. Bevezetés

A kényszeres, más néven szinguláris rendszereknek ma már nagy irodalma van [1-5].

Ez a dolgozat folytatása kíván lenni a hasonló című: *Kényszeres Dinamikai Rendszerek I* Elméleti Fizika Füzetnek [6]. Az említett füzetben a kényszeres, más néven szinguláris dinamikai rendszerek általános Lagrange- és Hamilton elméletét írtuk le, majd egy fontos alkalmazást: az elektromágneses mezőt tárgyaltuk.

Az általános elmélet ismertetésekor mind a Lagrange mind a Hamilton formalizmus tárgyalásában egy-egy algoritmust ismertettünk. Ezen algoritmusokat kívánjuk egy kiválasztott példa kapcsán [7] konkretizálni a második paragrafusban. A felhozott példa mesterkélt — minden pontmechanikai jellegű példa az lenne, de kiválóan alkalmas az általános eljárások konkrét esetben való szemléltetésére. A definiciókat általában nem ismételtük meg, így a munka említett első részének ismerete elengedhetetlen.

Ezután a történeti sorrendben elsőként felbukkanó kényszeres dinamikai rendszerrel foglalkozunk: a pontmechanika paraméteres leírásával [8]. Ez a paraméteres elméletek első reprezentánsa, gyökeresen más jellegű, mint az előzőleg tárgyalt elméletek. Egy paraméteres elméletben ugyanis a kényszerek szerepe egészen más, mint a hagyományos mértékelméletekben: míg itt magát az időfejlődést generálják, amott az ekvivalens állapotokat határozzák meg. A paraméteres elméletek legjelentősebb példája az általános relativitáselmélet, ennek ismertetésére azonban e dolgozat keretében nem kerül sor.

Végül a szabad relativisztikus részecskét [4] tárgyaljuk, mint kényszeres dinamikai rendszert. Ez egy aránylag egyszerű paraméteres elmélet.

E munka a 1605 sz. FEFA projekt támogatásával készült. A szerző köszönetét fejezi ki Dr. Gyémánt Ivánnak a kézirat átolvasásáért.

II. A kényszeres dinamikai rendszerek bemutatása egy egyszerű példán

Ebben a paragrafusban a [7] hivatkozásban szereplő, de ott részletességgel ki nem dolgozott, egyszerű példán keresztül szemléltetjük a kényszeres dinamikai rendszerekkel kapcsolatosan felmerülő új fogalmakat, valamint az ilyen rendszerek kanonikus tárgyalásában adódó, a szokványostól eltérő eljárásokat. Tekintsük a q_1, q_2, q_3 és q_4 általánosított koordinátákkal jellemzett dinamikai rendszert, melynek Lagrange függvénye [7]:

$$L = \frac{1}{2}\dot{q}_1^2 + q_3\dot{q}_2 - q_4 V(q_2, q_3) \tag{2.1}$$

ahol $V(q_2, q_3)$ a második és harmadik koordinátától függő tetszőleges potenciált jelöl.

Az Euler-Lagrange egyenletek:

$$\begin{aligned}
\ddot{q}_1 &= 0 \\
\Phi_1^{(I,B)} &:= \dot{q}_3 + q_4 \frac{\partial V}{\partial q_2} = 0 \\
\Phi_2^{(I,B)} &:= \dot{q}_2 - q_4 \frac{\partial V}{\partial q_3} = 0 \\
\Phi^{(I,A)} &:= V = 0
\end{aligned} \tag{2.2}$$

Látható, hogy a (2.2) egyenletek között csak egy dinamikai, azaz második időderiváltakat tartalmazó egyenlet van. A többi Euler-Lagrange egyenlet: két B-típusú, azaz sebességeket is tartalmazó, illetve egy A-típusú, azaz csak koordinátákat tartalmazó első generációs Lagrange kényszer.

Ha a Lagrange függvény sebességek szerinti második időderiváltjaiból képezett mátrixot vizsgáljuk, ugyanerre a következtetésre jutunk. A mátrix rangja 1, így a három nulla sajátértékhez tartozó sajátvektor három első generációs kényszert határoz meg [6].

Mivel a kényszereknek minden pillanatban teljesülniük kell, meg kell követelnünk időderiváltjaik eltűnését is:

$$\begin{aligned}
0 &= \dot{\Phi}_1^{(I,B)} = \ddot{q}_3 + \dot{q}_4 \frac{\partial V}{\partial q_2} + q_4 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2^2}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial q_3 \partial q_2}\dot{q}_3 \right) \\
0 &= \dot{\Phi}_2^{(I,B)} = \ddot{q}_2 - \dot{q}_4 \frac{\partial V}{\partial q_3} - q_4 \left(\frac{\partial^2 V}{\partial q_2 \partial q_3}\dot{q}_2 + \frac{\partial^2 V}{\partial q_3^2}\dot{q}_3 \right) \\
0 &= \dot{\Phi}^{(I,A)} = \frac{\partial V}{\partial q_2}\dot{q}_2 + \frac{\partial V}{\partial q_3}\dot{q}_3
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Az első két egyenlet új dinamikai egyenlet (mivel olyan másodrendű időderiváltakat tartalmaznak, melyek nem küszöbölhetők ki (2.2) felhasználásával sem), a harmadikról pedig a két B-típusú kényszer felhasználásával belátható, hogy azonosság. Így ebben az esetben nincs második generációs Lagrange függvény. A Lagrange formalizmusban a négy koordinátával jellemzett rendszer viselkedését három dinamikai egyenlet valamint három kényszer határozza meg.

Vizsgáljuk meg a négy koordinátához rendelt kanonikus impulzusokat is (az impulzusok indexei felső indexek):

$$\begin{aligned} p^1 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_1} = \dot{q}_1 \ , \qquad p^2 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_2} = q_3 \\ p^3 &= \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_3} = 0 \ , \qquad p^4 = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_4} = 0 \end{aligned} \tag{2.4}$$

A Hamilton formalizmusra való áttérés szokványos eljárása szerint fenti összefüggésekből kellene kifejezni az általánosított sebességeket a koordináták és impulzusok függvényeiként. Nyilvánvalóan itt ez csak $\dot{q}_1$ esetében hajtható végre. Az, hogy három sebesség kifejezése nem lehetséges, megint csak az első generációs Lagrange kényszerek jelenlétével függ össze. Vegyük észre, hogy (2.4) második, harmadik és negyedik egyenlete kizárólag koordinátákat és impulzusokat tartalmaznak (sebességeket nem) és mint ilyen, hamiltoni kényszerek. Hamiltoni kényszerként fogható fel az A-típusú Lagrange kényszer is.

A következőkben rátérünk a (2.1) dinamikai rendszer Hamilton formalizmusának részletes vizsgálatára. A (2.4)-ben talált kényszereket elsődleges hamiltoni kényszereknek nevezzük:

$$\phi_1^{(1)} := p^2 - q_3 = 0 \ , \qquad \phi_2^{(1)} := p^3 = 0 \ , \qquad \phi_3^{(1)} := p^4 = 0 \tag{2.5}$$

Ezen kényszerek egy kényszerfelületet értelmeznek. Arra az esetre, ha két függvény f és g csak a kényszerfelület pontjain vesz fel azonos értéket, a függvények gyenge egyenlőségének fogalmát használjuk $f \approx g$. (Itt jegyezzük meg, hogy a gyenge egyenlőségeket kizárólag a Poisson zárójelek számolása után használhatjuk fel.) Az általános Dirac-Bergmann algoritmus szerint a szokványos módon képezett kanonikus Hamilton függvényhez (H_C), mely esetünkben csak a kényszerfelületen értelmezett (lásd [6]), hozzáadva az elsődleges hamiltoni kényszerek lineáris kombinációját, az elsődleges Hamilton függvényhez (H_P) jutunk. A lineáris kombináció együtthatói, az általános elméletből ismert módon, éppen a (2.4)-ből ki nem fejezhető sebességek:

$$\begin{aligned} H_C &= \frac{1}{2}(p^1)^2 + q_4 V \\ H_P &= H_C + \dot{q}_2\phi_1^{(1)} + \dot{q}_3\phi_2^{(1)} + \dot{q}_4\phi_3^{(1)} = \\ &= H_C + \dot{q}_2(p^2 - q_3) + \dot{q}_3 p^3 + \dot{q}_4 p^4 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Tetszőleges f függvény időfejlődését az

$$\dot{f} \approx \{f, H_P\} \tag{2.7}$$

egyenlet írja le. Hasonlóan a Lagrange formalizmushoz, a kényszerek időbeni megmaradását itt is meg kell követelni, melynek következményeként két ismeretlen együttható $\dot{q}_2$ és $\dot{q}_3$ meghatározottá válik, valamint adódik egy új, azaz másodlagos kényszer is. A másodlagos kényszer időderiváltja azonosság:

$$\begin{aligned} \dot{\phi}_1^{(1)} &= -q_4\frac{\partial V}{\partial q_2} - \dot{q}_3 \approx 0 \qquad &\rightarrow& \qquad \dot{q}_3 \approx -q_4\frac{\partial V}{\partial q_2} \\ \dot{\phi}_2^{(1)} &= -q_4\frac{\partial V}{\partial q_3} + \dot{q}_2 \approx 0 \qquad &\rightarrow& \qquad \dot{q}_2 \approx q_4\frac{\partial V}{\partial q_3} \\ \dot{\phi}_3^{(1)} &= -V \approx 0 \qquad &\rightarrow& \qquad \phi^{(2)} = V \approx 0 \\ \dot{\phi}^{(2)} &= \dot{q}_2\{V, p^2\} + \dot{q}_3\{V, p^3\} \approx 0 \qquad && \qquad \mathit{azonosság} \end{aligned} \tag{2.8}$$

Ezzel a hamiltoni kényszerek előállításának algoritmusa is befejeződött. Vegyük észre, hogy a másodlagos hamiltoni kényszert a Lagrange kényszerek között is megtaláltuk. Ez egy általában is igaz állítás sajátos esete.

A vizsgált rendszernek egy érdekes tulajdonságára is felfigyelhetünk: az elsődleges Hamilton függvény (H_P) lineárisan tartalmazza a másodlagos kényszert is a kanonikus H_C Hamilton függvényen keresztül.

Hátra van még a négy hamiltoni kényszer egymással vett Poisson-zárójeleinek vizsgálata, a kényszerek első, illetve második osztályba való besorolásának céljából:

$$\begin{aligned}
\{\phi_1^{(1)},\phi_2^{(1)}\} &= \{p^2-q_3,p^3\} = -1 \\
\{\phi_1^{(1)},\phi_3^{(1)}\} &= \{p^2-q_3,p^4\} = 0 \\
\{\phi_1^{(1)},\phi^{(2)}\} &= \{p^2-q_3,V(q_2,q_3)\} = \{p^2,V\} = -\frac{\partial V}{\partial q_2} \\
\{\phi_2^{(1)},\phi_3^{(1)}\} &= \{p^3,p^4\} = 0 \\
\{\phi_2^{(1)},\phi^{(2)}\} &= \{p^3,V(q_2,q_3)\} = -\frac{\partial V}{\partial q_3} \\
\{\phi_3^{(1)},\phi^{(2)}\} &= \{p^4,V(q_2,q_3)\} = 0
\end{aligned} \tag{2.9}$$

Mivel $\phi_3^{(1)}$-nak az összes többi kényszerrel vett Poisson zárójele eltűnik, elsőosztályú hamiltoni kényszer. A többi három kényszer látszólag másodosztályú, valójában csak kettő az közülük. Belátható ugyanis, hogy képezhető belőlük a

$$\phi = \frac{\partial V}{\partial q_3}\phi_1^{(1)} - \frac{\partial V}{\partial q_2}\phi_2^{(1)} + \phi^{(2)} \tag{2.10}$$

kombináció, amely elsőosztályú, azaz az összes többi kényszerrel vett Poisson zárójele nulla. Így a rendszer két elsőosztályú ($\phi_3^{(1)}$ és ϕ), illetve két másodosztályú ($\phi_1^{(1)}$ és $\phi_2^{(1)}$) kényszerrel rendelkezik. Itt is teljesül az általános elméletből ismert állítás, miszerint másodosztályú kényszerek mindig páros számban fordulnak elő.

A hamiltoni kényszerek első-, illetve másodosztályú besorolásának jelentősége messze túlmutat elsődleges, illetve másodlagos jellegüknél. A tetszőleges f függvény időfejlődését leíró (2.7) egyenletben szereplő (2.6) elsődleges Hamilton függvény a (2.8) összefüggések figyelembevétele után már csak egy tetszőleges függvényt tartalmaz: $\dot{q}_4$-et, az elsődleges első osztályú $\phi_3^{(1)}$ kényszer együtthatóját.

$$\begin{aligned}
\dot{f} &\approx \{f,H_P\} \\
H_P &= H_C + q_4\frac{\partial V}{\partial q_3}(p^2-q_3) - q_4\frac{\partial V}{\partial q_2}p^3 + \dot{q}_4 p^4 = \\
&= \frac{1}{2}(p^1)^2 + q_4\phi + \dot{q}_4\phi_3^{(1)}
\end{aligned} \tag{2.11}$$

A kényszeres rendszereknek ez egy igen fontos sajátossága: a megoldás nem mindig egyértelmű, jelen esetben $\dot{q}_4 = \dot{q}_4(q_i,p^i)$ tetszőleges függvényt tartalmazza. Ezért ha egy elméletben elsődleges elsőosztályú hamiltoni kényszerek vannak, csak azon mennyiségeket tekinthetjük megfigyelhetőnek, melyek maguk is első osztályúak, így az előbb említett tetszőleges jelleggel nem rendelkeznek.

Megjegyzés: A gyenge egyenlőségekkel kifejezett $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ -at a Poisson zárójelek számolása előtt helyettesítettük be, ami látszólag ellentmond annak az általános szabálynak, hogy a gyenge egyenlőségek csak a Poisson zárójelek számolása után használhatók fel. Valójában nincs ellentmondás, mert azon Poisson zárójeleket, melyek $\dot{q}_2$, $\dot{q}_3$ -at tartalmazzák, mindig egy (gyengén eltűnő) kényszer szoroz meg, így ezek a tagok nem befolyásolják az eredményt.

A (2.11) fejlődésegyenlet valamivel egyszerűbb alakban írható az ún. teljes Hamilton függvény (H_T) bevezetésével, mely a kanonikus Hamilton függvény és az elsődleges elsőosztályú kényszer lineáris kombinációja:

$$\begin{aligned} H_T =& H_C + \dot{q}_4 p^4 = \frac{1}{2}(p^1)^2 + q_4 \phi^{(2)} + \dot{q}_4 \phi_3^{(1)} = \\ =& \frac{1}{2}(p^1)^2 + q_4 \phi - q_4 \frac{\partial V}{\partial q_3} \phi_1^{(1)} + q_4 \frac{\partial V}{\partial q_2} \phi_2^{(1)} + \dot{q}_4 \phi_3^{(1)} = \\ =& H_P - q_4 \frac{\partial V}{\partial q_3} \phi_1^{(1)} + q_4 \frac{\partial V}{\partial q_2} \phi_2^{(1)} \end{aligned} \tag{2.12}$$

A Hamilton függvények hierarchiájában utolsóként végül bevezetjük a bővített Hamilton függvényt (H_E) is, amit úgy nyerünk, hogy a teljes Hamilton függvényhez hozzáadjuk a másodlagos elsőosztályú kényszerek lineáris kombinációját is, (jelen esetben ez ϕ):

$$H_E = H_T + u\phi \tag{2.13}$$

Egyes szerzők szerint ezt a bővített Hamilton függvényt célszerű használni H_T helyett. Ebben az esetben az eltérés minimális a két Hamilton függvény között, csak a ϕ kényszer együtthatója különbözik.

A fejlődésegyenlet tovább egyszerűsíthető az ún. Dirac zárójel bevezetésével. Jelen esetben (2.9) figyelembevételével, az f és g függvények Dirac zárójele a következő alakot ölti:

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} - \{f, \phi_1^{(1)}\}\{\phi_2^{(1)}, g\} + \{f, \phi_2^{(1)}\}\{\phi_1^{(1)}, g\} \tag{2.14}$$

Segítségével (2.11) tömör formában írható:

$$\dot{f} \approx \{f, H_P\} \approx \{f, H_T\}_D \tag{2.15}$$

a bizonyításhoz (2.8), (2.9) és (2.12) összefüggéseket kell felhasználni.

A Dirac zárójel legfontosabb tulajdonsága, hogy a másodosztályú kényszerek tetszőleges függvénnyel vett Dirac zárójele mindig nulla. Ezért Dirac zárójelek használata esetén a gyenge egyenlőségek már a zárójelek számolása előtt felhasználhatók, azaz gyakorlatilag már kezdettől fogva a másodosztályú kényszerek megoldására törekedhetünk.

Legelegánsabban akkor járunk el, ha egy kanonikus transzformáció segítségével a másodosztályú kényszereket kanonikus koordinátákká alakítjuk. Jelen esetben ezt könnyű elérni a:

$$\begin{pmatrix} q_1 & q_2 & q_3 & q_4 \\ p^1 & p^2 & p^3 & p^4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} q_1 & Q_2 = q_2 - p^3 & Q_3 = q_3 - p^2 = -\phi_1^{(1)} & q_4 \\ p^1 & P^2 = p^2 & P^3 = p^3 = \phi_2^{(1)} & p^4 \end{pmatrix} \tag{2.16}$$

kanonikus transzformációval, melynek inverze:

$$q_2 = Q_2 + P^3 \ , \qquad q_3 = Q_3 + P^2 \tag{2.17}$$

A teljes Hamilton függvény az új koordinátákban:

$$H_T = \frac{1}{2}(p^1)^2 + q_4 V(Q_2 + P^3, Q_3 + P^2) + \dot{q}_4 p^4 \tag{2.18}$$

Mivel Q_3, P^3 koordináták másodosztályú kényszerek, még a Dirac zárójelek számolása előtt nullává tehetők, így a Dirac zárójelbe helyettesítendő teljes Hamilton függvény:

$$H_T' = \frac{1}{2}(p^1)^2 + q_4 V(Q_2, P^2) + \dot{q}_4 p^4 \tag{2.19}$$

A kanonikus transzformáció utáni koordináták segítségével felírt Dirac zárójel:

$$\{f,g\}_D = \{f,g\} - \frac{\partial f}{\partial Q_3}\frac{\partial g}{\partial P^3} + \frac{\partial f}{\partial P^3}\frac{\partial g}{\partial Q_3} = \{f,g\}' \tag{2.20}$$

Itt $\{\ ,\ \}'$ a szűkített fázistér Poisson zárójelét jelöli. Vagyis **az eredeti fázistéren értelmezett Dirac zárójel a másodosztályú kényszerek megoldása által adódó szűkített fázistér Poisson zárójelével egyezik meg!** A szűkített fázisteret a q_1, Q_2, q_4 és p^1, P^2, p^4 kanonikusan konjugált koordináták feszítik ki. A két másodosztályú kényszer megoldása kettővel csökkentette a fázistér dimenzióját.

A (2.15) fejlődésegyenlet ezek után:

$$\dot{f} \approx \{f, H_P\} \approx \{f, H_T\}_D \approx \{f, H_T'\}' \tag{2.21}$$

A megmaradt kényszerek:

$$\phi_3^{(1)} = p^4 = 0 \qquad \phi = V(Q_2, P^2) = 0 \tag{2.22}$$

az új Poisson zárójelre nézve is elsőosztályúak. Ezeket mérték típusú kényszerek bevezetésével lehet másodosztályúvá tenni, majd megoldásukra törekedni. (Ezek az újonnan bevezetett kényszerek a térelméletekben előforduló mérték-kényszerekhez hasonló szerepet töltenek be.)

Elsőként vezessük be a

$$\Psi_1 = q_4 - \alpha \approx 0 \tag{2.23}$$

kényszert (α konstans), ami a $\phi_3^{(1)}$ kényszert másodosztályúvá teszi, miközben ϕ továbbra is elsőosztályú marad:

$$\begin{aligned} \{\phi_3^{(1)}, \Psi_1\}' &= -1 \\ \{\phi_3^{(1)}, \phi\}' &= 0 \\ \{\phi, \Psi_1\}' &= 0 \end{aligned} \tag{2.24}$$

Az új kényszerre kirótt konzisztenciafeltétel, azaz az idősderiváltjának az eltűnése megadja az ismeretlen $\dot{q}_4$ együtthatót, mellyel a teljes Hamilton függvény tovább egyszerűsíthető:

$$\begin{aligned} \dot{q}_4 &= 0 \\ H_T'' &= \frac{1}{2}(p^1)^2 + \alpha V(Q_2, P^2) \end{aligned} \tag{2.25}$$

A fázistér dimenziója ismét csökkent kettővel, jelenleg a q_1, Q_2, p^1, P^2 kanonikus koordináták feszítik ki. A Hamilton függvény H_T'' és egyetlen elsőosztályú kényszer maradt: $\phi = V(Q_2, P^2) = 0$, ami a szabadsági fokok számát kettővel csökkenti még. Ez utóbbi kényszer is megoldható az elöbb vázolt módon, mérték típusú kényszer bevezetésével, abban az esetben, ha a V függvény alakját megadjuk.

Például $V = \frac{(Q_2)^2 + (P^2)^2}{2}$ és $\Psi_2 = Q_2 + P^2 = 0$ esetén a Hamilton egyenlet: $\dot{f} = \{f, \frac{1}{2}(p^1)^2\}$ lesz és nem maradt egyetlen kényszer sem.

III. A pontmechanika parametrikus leírása

A legegyszerűbb kényszeres dinamikai rendszert a klasszikus mechanikai problémák ún. paraméteres leírásából kapjuk [8]. Tekintsük elsőként az n szabadsági fokú rendszert leíró hatásfunkcionált:

$$I[q_1,..,q_n;t) = \int_{t_1}^{t_2} dt\ L(q_1,...,q_n,\dot{q}_1,...,\dot{q}_n;t)\ , \tag{3.1}$$

ahol $q_i = q_i(t)$ és $\dot{q}_i = \dot{q}_i(t)$. A szögletes zárójelben található argumentumok funkcionál függést fejeznek ki. Vezessük be a τ paramétert a történések időrendi sorrendjének jellemzésére. Ez a paraméter így az idő tetszőleges monoton függvénye lehet, és a tárgyalásban az idő szerepét játssza, de természetesen nem azonos az órák által mutatott idővel:

$$q_i = q_i(\tau)\ , \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(\tau)\ , \quad t = t(\tau)\ . \tag{3.2}$$

A fizikai időt nevezzük ki $(n+1)$-edik koordinátának:

$$q_{n+1} = t \tag{3.3}$$

Míg a t szerinti deriválást ponttal, a τ szerinti deriválást vesszővel fogjuk jelölni. A kétféle derivált közötti kapcsolat tetszőleges f függvényre:

$$f' \ :=\ \frac{df}{d\tau}\ =\ \frac{df}{dt}\,\frac{dq_{n+1}}{d\tau}\ =\ \dot{f}q'_{n+1}\ . \tag{3.4}$$

A hatás így egy $(n+1)$ -dimenziós konfigurációs téren (az ún. **eseménytér**en) értelmezett funkcionálként fogható fel:

$$\begin{aligned} I[q_1,..,q_n,q_{n+1}] &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\ q'_{n+1}L(q_1,...,q_n,q_{n+1},\frac{q'_1}{q'_{n+1}},...,\frac{q'_n}{q'_{n+1}}) \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau\ L_1(q_1,...,q_n,q_{n+1},q'_1,...,q'_n,q'_{n+1}) \end{aligned}\ , \tag{3.5}$$

Fenti összefüggésből leolvasható az új, τ paraméterhez tartozó L_1 Lagrange függvény.

Az $(n+1)$ változóval való leírást **parametrikus leírás**nak, az új fázisteret, amiben az idő is koordináta, **bővített fázistér**nek nevezzük. A pontmechanika ilyen leírása Lagrange-ig vezethető vissza.

A parametrikus leírásmódban adódó leglényegesebb állítás az, hogy **a bővített $2(n+1)$ dimenziós fázistéren értelmezett Hamilton függvény azonosan nulla!** Ezt könnyű belátni Euler homogén függvényekre vonatkozó tétele alapján. L_1 ugyanis elsőrendű homogén függvény $q'_1, ..., q'_{n+1}$ változóiban, így a tétel értelmében:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L_1}{\partial q'_i} q'_i &= L_1 \\ H_1 = \frac{\partial L_1}{\partial q'_i} q'_i - L_1 \ &= \ L_1 - L_1 \ = \ 0 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Fenti összefüggésekben és a következőkben több helyen is az Einstein-féle összegzési konvenciót használjuk: ha egy index egy kifejezésben kétszer ismétlődik, egyszer alsó, egyszer meg felső indexként, összegezni kell ezen index szerint. Ebben a paragrafusban a latin karakterek 1-től $(n+1)$-ig, a görög karakterek pedig 1-től n-ig terjedő értékeket vesznek fel.

Az új Lagrange függvénynek érdekes tulajdonsága, hogy az $(n+1)$-dik koordinátához, vagyis az időhöz konjugált kanonikus impulzus egy előjeltől eltekintve a rendszer energiája:

$$\begin{aligned} p^{\mu} &= \frac{\partial(q'_{n+1}L)}{\partial q'_{\mu}} = q'_{n+1} \frac{\partial \dot{q}_{\nu}}{\partial q'_{\mu}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\nu}} = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\mu}} \\ p^{n+1} &= \frac{\partial(q'_{n+1}L)}{\partial q'_{n+1}} = L + q'_{n+1} \frac{\partial \dot{q}_{\nu}}{\partial q'_{n+1}} \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_{\nu}} = L - p^{\nu}\dot{q}_{\nu} = -H \end{aligned} \quad . \tag{3.7}$$

A fenti levezetésekben a t és τ deriváltak közötti (3.4) összefüggést használtuk fel. Itt találkozunk az első kényszerrel: (3.7) második egyenlete kizárólag a koordináták és impulzusokat tartalmazza, így megszorítást jelent lehetséges értékeikre. Nevezzük ezt a kényszert $C_0(q,p)$-nek:

$$C_0(q,p) := p^{n+1} + H(p,q) = 0 \quad . \tag{3.8}$$

Belátható, hogy a (3.6)-beli állítás, miszerint $H_1 = 0$, valamint a $C_0 = 0$ kényszer egymásból is származtathatók:

$$\begin{aligned} H_1 \ &= \frac{\partial L_1}{\partial q'_i} q'_i - L_1 \\ &= \frac{\partial L_1}{\partial q'_{n+1}} q'_{n+1} + \frac{\partial(q'_{n+1}L)}{\partial q'_{\mu}} q'_{\mu} - q'_{n+1}L \\ &= p^{n+1} q'_{n+1} + q'_{n+1} \frac{\partial L}{\partial q'_{\mu}} q'_{\mu} - q'_{n+1}L \\ &= q'_{n+1} \left[p^{n+1} + (p^{\mu}\dot{q}_{\mu} - L) \right] \ = \ q'_{n+1} \left(p^{n+1} + H \right) \ = \ q'_{n+1} C_0 \quad . \end{aligned} \tag{3.9}$$

Miként beszélhetünk Hamilton formalizmusról, kanonikus egyenletekről ha H_1 Hamilton függvény eltűnik? A válasz: módosítani kell a hatásban az integrandust olymódon, hogy a tetszőleges N Lagrange szorzóval megszorzott kényszert is hozzáadjuk. A helyes Hamilton egyenleteket megadó hatás tehát:

$$\bar{I}[q_1, .., q_n, q_{n+1}; N] = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \ (p^i q_i' - N \ C) \tag{3.10}$$

Itt C a kényszer, ami nem föltétlenül C_0, de C_0 gyökeivel egyező gyökei vannak. Fenti kifejezéshez az L_1 Lagrange függvénynek (3.6) első egyenletéből származó kifejezését, valamint az impulzusok szokásos definicióját használtuk fel.

Az N Lagrange szorzó természetesen megjelenik az egyenletek megoldásában is. Így amellett, hogy a kezdeti adatok nem lehetnek tetszőlegesek a (3.8) kényszer miatt, a megoldás is tartalmaz tetszőleges függvényt.

Általában kétféle módszerrel oldhatjuk fel ezt a határozatlanságot:

• megoldjuk a kényszeregyenletet, ezáltal csökkentve a változók számát, és eltűntetve N-t az egyenletekből. Az előállt hatást **redukált hatás**nak, a Lagrange függvényt pedig **redukált Lagrange függvény**nek nevezzük. Jelen esetben p^{n+1}-t küszöböljük ki a többi kanonikus változó segítségével, (3.8) felhasználásával:

$$I_R = \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \ (p^\nu q_\nu' - H q_{n+1}') = \int_{q_{n+1}^{(1)}}^{q_{n+1}^{(2)}} dq_{n+1} \left[p^\nu \frac{dq_\nu}{dq_{n+1}} - H \right] \tag{3.11}$$

Ez pontosan az n szabadsági fokú rendszer kanonikus alakban felírt hatásfunkcionálja. Észrevehető, hogy a q_{n+1}-dik koordináta ugyanazt a szerepet játssza, mint eredetileg az idő, azaz a független változó szerepét. A τ paraméter pedig teljességgel eltűnt a képből.

• speciális koordinátaválasztással élünk, ezáltal tüntetve el a határozatlanságot. A $q_{n+1} = \tau$ választás mellett a hatás (3.11) alakja áll elő. Másik $q_{n+1} = q_{n+1}(\tau)$ választás mellett q_{n+1}-től különböző független változó veszi át az idő szerepét.

A pontmechanika parametrikus leírásmódja rendkívül hasznosnak bizonyul akkor, ha a kanonikus kvantálás útját akarjuk járni. Ha az impulzusok szokásos operátoralakját behelyettesítjük az operátorként ható hamiltoni kényszer (3.8) kifejezésébe, a következő egyenlethez jutunk:

$$\left(i\frac{\partial}{\partial t} + \hat{H} \right) |\Psi >= 0 \tag{3.12}$$

Ez nem más, mint a Schrödinger egyenlet!

Mindaz, amit ebben a fejezetben elmondtunk a pontmechanika esetére, általánosítható mezőkkel történő leírásra is. Ilyenkor a hatásban az idő szerepét a négy téridő koordináta veszi át, melyek négy új mezőnek tekinthetők, τ_{1-4} új paraméterek bevezetésével egyidejűleg. A bővítés során a fázistér $2n$ dimenziósról $(2n+8)$ dimenzióssá válik.

IV. A szabad relativisztikus részecske

Tekintsünk egy szabadon mozgó relativisztikus részecskét sík téridőben [4]. A Minkowski metrikát jelölje:

$$\eta_{ab} = diag(-1, 1, 1, 1) \tag{4.1}$$

a részecske koordinátáit pedig x^a (a téridő koordinátákat latin, a térkoordinátákat görög betükkel indexeljük). A részecske világvonalát τ monoton növekvő változó paraméterezi. A szabad részecskét leíró hatás:

$$I = -m \int_{\tau_1}^{\tau_2} d\tau \sqrt{-\eta_{ab}\dot{x}^a \dot{x}^b} \tag{4.2}$$

ahol m a részecske tömege, a pont $\dot{x}^a = \frac{dx^a}{d\tau}$ paraméter szerinti deriválást jelöl és a minusz előjel azért szükséges, mert időszerű mozgásokat vizsgálunk, melyekre $\eta_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b < 0$. Továbbá feltesszük, hogy a mozgás jövőirányított, azaz $\dot{x}^a > 0$. A fénysebességet egységnyinek választjuk.

A (4.2) hatás szinguláris rendszert ír le. Ha a Lagrange függvény sebességek szerint vett második időderiváltjaiból álló mátrixot képezzük, ennek determinánsa nulla, rangja pedig 3. A nulla sajátértékhez tartozó sajátvektor pontosan a négyes-sebesség: $\dot{x}^a$. Az Euler-Lagrange egyenletek:

$$(\mathcal{EL})_c = \frac{d}{d\tau}\left(\frac{\dot{x}_c}{\sqrt{-\eta_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b}}\right) = 0 \tag{4.3}$$

Az Euler-Lagrange egyenleteket a nulla sajátértékhez tartozó sajátvektorral kontrahálva, egy azonossághoz jutunk:

$$\dot{x}^c(\mathcal{EL})_c \equiv 0 \tag{4.4}$$

Ebből látható, hogy az Euler-Lagrange egyenletek egymástól nem függetlenek. Ez kapcsolatos az elméletnek átparaméterezéskor mutatott invarianciájával (a τ paraméter helyett egy új $\tau'(\tau)$ paramétert vezetünk be, úgy hogy τ' monoton növekvő függvénye τ-nak és a végpontok változatlanok). Bár a Lagrange értelemben vett kényszerek hiányoznak (már az első kényszer is azonosság), (4.4) miatt az egyenletek nem határozzák meg egyértelműen a koordináták időfejlődését.

Az impulzusok:

$$p_c := \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{x}^c} = m\frac{\dot{x}_c}{\sqrt{-\eta_{ab}\dot{x}^a\dot{x}^b}} \tag{4.5}$$

Így az Euler-Lagrange egyenletek pontosan ezen impulzusok mozgásállandó jellegét mondják ki. Bár látszólag az összes sebesség kifejezhető impulzusok és koordináták segítségével, valójában ezek a kifejezések nem függetlenek egymástól. Ezt legkönnyebben úgy láthatjuk be, ha (4.5) térszerű egyenleteit invertáljuk elsőként:

$$\dot{x}^\alpha = \frac{p^\alpha\dot{x}^0}{\sqrt{m^2+\mathbf{p}^2}} \tag{4.6}$$

majd ezt behelyettesítjük (4.5) fennmaradt egyenletébe:

$$p^0 = (m^2+\mathbf{p}^2)^{\frac{1}{2}} \tag{4.7}$$

Itt $\mathbf{p}$ az impulzus vektort, azaz a négyes impulzus térszerű részét jelöli. A speciális relativitáselméletből jól ismert(4.7) összefüggés itt hamiltoni kényszerként jelentkezik:

$$\phi = -(p^0)^2 + \mathbf{p}^2 + m^2 \tag{4.8}$$

Így (4.6) integrálása a következő kifejezéseket adja a koordinátákra:

$$\begin{aligned} & x^\alpha(\tau) = \frac{p^\alpha}{p^0} x^0(\tau) + \xi^\alpha \ , \qquad \alpha = 1,2,3 \\ & x^0(\tau) \quad tetsz\H{o}leges \end{aligned} \tag{4.9}$$

A koordináták csak akkor válnak rögzítetté (legalább a p^α és ξ^α integrációs állandók erejéig), ha valamilyen választással élünk $x^0(\tau)$ függvényre. Legyen például:

$$x^0(\tau) = \tau \tag{4.10}$$

Ekkor a szabad részecskét leíró mozgásegyenletek jól ismert, lineáris alakját nyerjük.

A továbbiakban vizsgáljuk a Hamilton formalizmust. Mivel (4.2)-ben a Lagrange függvény homogén elsőrendű a sebességekben, akárcsak az előző paragrafusban, a (3.6) bizonyítás itt is elvégezhető, melynek eredményeképpen eltűnő kanonikus Hamilton függvényhez jutunk. Megjegyezzük, hogy az eltűnő Hamilton függvény általában is sajátja a paraméteres (átparaméterezésre invariáns, más néven kovariáns, más néven homogén) elméleteknek. Az elsődleges Hamilton függvényt így kizárólag a (4.8) elsődleges hamiltoni kényszer határozza meg:

$$H_P = v\phi \tag{4.11}$$

Itt $v = v(\tau)$ tetszőleges függvény. Az általános elmélethez hasonlóan itt is következik, hogy ez az ismeretlen függvény (egy szorzó erejéig) a kanonikus koordinátákkal ki nem fejezett $\dot{x}^0$ sebesség:

$$\dot{x}^0 = \{x^0, H_P\} = 2p^0 v \tag{4.12}$$

A kényszer teljesíti a konzisztenciafeltételt, azaz idNew deriváltja azonosság.

Az egyetlen talált kényszer természetesen elsőosztályú, ezért a fázistér dimenzióját úgy csökkenthetjük, ha egy külső (eddig mérték-típusúnak nevezett) kényszert vezetünk be. Legyen ez a kényszer:

$$\Omega = x^0 - \tau = 0 \tag{4.13}$$

Az új kényszer valójában a paraméter megválasztását jelenti ebben az esetben. Ezekután az elméletben két másodosztályú kényszer van, mivel:

$$\{\Omega, \phi\} = 2p^0 \tag{4.14}$$

Az Ω kényszerre kirótt konzisztenciafeltétel meghatározza az ismeretlen függvényt:

$$0 = \dot{\Omega} = \frac{\partial \Omega}{\partial \tau} + \{\Omega, H_P\} \qquad \rightarrow \qquad \dot{x}^0 = \frac{1}{2p^0} v(\tau) = 1 \tag{4.15}$$

Amennyiben (4.13)-ból származó egyszerűsítéseket még a zárójelek számolása előtt fel kívánjuk használni, a két másodosztályú kényszer segítségével képezett Dirac zárójeleket kell használni:

$$\{f, g\}_D = \{f, g\} + \frac{1}{2p^0}\{f, x^0\}\{p^2, g\} - \frac{1}{2p^0}\{f, p^2\}\{x^0, g\} \tag{4.16}$$

Itt $p^2 = -(p^0)^2 + \mathbf{p}^2$ jelölést alkalmaztuk.

A fundamentális Dirac zárójelek természetesen különböznek a fundamentális Poisson zárójelektől:

$$\begin{aligned} \{x^a, x^b\}_D =& 0 \ , \qquad \{p_a, p_b\}_D = 0 \ , \\ \{x^a, p_b\}_D =& \delta^a_b - \frac{p^a}{p^0}\delta^0_b \ . \end{aligned} \tag{4.17}$$

Végezetül egy érdekes megjegyzés: amennyiben a szabad relativisztikus részecske előbb ismertetett klasszikus elméletét a kvantáláshoz kívánjuk kiindulási pontként használni, a kanonikus koordináták operátorokká válnak, melyek egy állapottéren hatnak. Az állapottérnek csak az a része kell fizikai állapotokat leírjon, melyet a (szintén operátorosított) kényszer annihilál:

$$(\hat{p}^2 + m^2)|\Psi >= 0 \tag{4.18}$$

Ez nem más, mint az impulzus reprezentációban felírt Klein-Gordon egyenlet.

Mint látható, (4.18)-ban előjött a relativisztikus elméletek kvantumos tárgyalásakor adódó egyik fő nehézség: (3.12)-vel ellentétben a p^0 itt nem lineárisan jelenik meg. Bár ez a nehézség kezelhető a Klein-Gordon egyenlet esetében, az általános relativitáselmélet kanonikus kvantálását rendkívüli módon megnehezíti.

AJÁNLOTT IRODALOM

[1] Dirac: Lectures on Quantum Mechanics, *Yeshiva University Press (1964)*

[2] Sudarshan, Mukunda: Classical Dynamics. A Modern Perspective, *Wiley (1974)*

[3] Hanson, Regge, Teitelboim: Constrained Hamiltonian Systems, *Academia Nationale dei Lincei (1976)*

[4] Sundermayer: Constrained Dynamics, *Springer (1982)*

[5] Esposito: Quantum Gravity, Quantum Cosmology and Lorentzian Geometries, második kiadás, II. fejezet *Springer (1994)*

[6] Gergely: Kényszeres dinamikai rendszerek I, *JATE Elméleti Fizikai Füzetek (1995)*

[7] Romano: *General Relativity and Gravitation* **25**, *no. 8 p. 759 (1993)*

[8] Lánczos: The Variational Principles of Mechanics, *Toronto Univ. Press (1949)*